



**CONCOURS D'ENTREE EN 1^{ère} ANNEE DU CYCLE DE FORMATION DES ANALYSTES
PROGRAMMEURS & LICENCES PROFESSIONNELLES EN INFORMATIQUE
(SESSION D'AOÛT 2019)**

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 Heures Coefficient : 6 Date : 07/08/2019

NB : Sans documents. Le sujet comporte deux (2) pages. N'utiliser que la feuille de composition mise à votre disposition. La copie ne doit pas être signée et ne devra porter aucun signe distinctif.

EXERCICES : (9 points)

EXERCICE 1 :

Une urne contient deux (02) boules blanches et quatre (04) boules noires indiscernables au toucher. Un joueur tire simultanément deux (02) boules de l'urne et on note :

A_i : « Le joueur a tiré i boules blanches et $2 - i$ boules noires ».

- Calculer la probabilité des événements A_0 , A_1 et A_2 . (0,5 pt) x 3
A ce premier tirage, le joueur remet les boules noires tirées dans l'urne et laisse les boules blanches tirées de côté, puis effectue un nouveau tirage simultané de deux (02) boules.
- Soit B_i l'événement : « On tire i boules blanches lors du deuxième tirage » ($i \in \{0,1,2,3\}$).
Donner $P(B_0 / A_2)$ et en déduire $P(B_0 \cap A_2)$. (0,5 pt) x 2
Calculer de même $P(B_0 \cap A_1)$. et $P(B_0 \cap A_0)$. En déduire que $P(B_0) = \frac{41}{75}$. (0,5 pt) x 3
Montrer de même que $P(B_2) = \frac{2}{75}$. En déduire $P(B_1)$. (0,5 pt) x 2

EXERCICE 2

L'objectif de cet exercice est de calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2}} \quad J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2}} dx \quad K = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 2} dx$$

- f est la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 2})$.
 - Calculer la dérivée de la fonction $x \rightarrow \sqrt{x^2 + 2}$. (0,5 pt)
 - En déduire la fonction dérivée f' de f . (0,5 pt)
 - Calculer la valeur de I . (0,5 pt)
- Sans calculer explicitement J et K , vérifier que $J + 2I = K$. (0,5 pt)
- A l'aide d'une intégration par partie, montrer que $K = \sqrt{3} - J$. (1 pt)
En déduire les valeurs de J et de K . (0,5 pt) x 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 2cm. On considère la fonction numérique f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = xe^x - x & ; \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = 2x(-1 + \ln x) & ; \text{si } x > 0 \end{cases}$$

PARTIE A :

Soit la fonction g définie sur $]-\infty; 0]$ par : $g(x) = xe^x - x$

1. Calculer la limite de g en $-\infty$ (0,5 pt)
2. a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]-\infty; 0]$, calculer $g'(x)$ et $g''(x)$ où g' et g'' désignent respectivement les dérivées première et seconde de g . (0,75 pt)
 - b. Démontrer que la courbe (Cg) de g admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées. (0,5 pt)
 - c. Dresser le tableau de variation de g' puis en déduire le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x . (1 pt)

PARTIE B :

1. Déterminer l'ensemble de définition de f . (0,25 pt)
2. Démontrer que f est continue en 0 (0,5 pt)
3. a. Etudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu. (1 pt)
 - b. Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0; +\infty[$ et étudier son signe. (1 pt)
4. a. Calculer la limite de f en $+\infty$. (0,5 pt)
 - b. Dresser le tableau de variation de f sur son ensemble de définition. (0,75 pt)
5. Soit φ l'application définie par : $\varphi: J \rightarrow f(J); x \rightarrow \varphi(x) = f(x)$ où $J = [1; +\infty[$
 - a. Démontrer que φ est une bijection. (0,25 pt)
 - b. Soit φ^{-1} la bijection réciproque de φ .
Montrer que la fonction dérivée $(\varphi^{-1})'$ de φ^{-1} est positive sur $f(J) - \{-2\}$. (0,25 pt)

PARTIE C:

On désigne par (Cf) la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Justifier que la droite (Δ) d'équation $y = -x$ est asymptote oblique à (Cf) au voisinage de $-\infty$. (0,25 pt)
2. Etudier la branche infinie de (Cf) au voisinage de $+\infty$. (0,5 pt)
3. Construire la courbe (Cf) et les tangentes en 0 dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (1 pt)
4. Soit h la fonction numérique par : $h(x) = -f(x)$, et (Ch) sa courbe représentative. Construire (Ch) dans le même repère que (Cf) . (0,5 pt)
5. Soit : $H(x) = \int_1^x h(t)dt, \forall x \in J$.
 - a. Démontrer que la fonction H est bien définie et continue sur J . (0,5 pt)
 - b. Calculer $H(e)$. En donner une interprétation géométrique. (0,5 pt)
 - c. Calculer en cm^2 l'aire de la région du plan délimitée par (Cf) , (Cg) , et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e$. (0,5 pt)

BONNE CHANCE



Institut Africain d'Informatique
Etablissement Inter-Etats d'Enseignement Supérieur
Représentation du Togo (IAI-TOGO)
07 BP 12456 Lomé 07 Tél. : (+228) 22.20.47.00

E-mail : iaitogo@iai-togo.com; iaitogo@yahoo.fr Site Web : www.iai-togo.com

CONCOURS D'ENTREE EN 1^{ère} ANNEE / SEPTEMBRE 2018

Épreuve de Mathématiques

Durée : 4 h

Exercice 1

1. On considère le polynôme P de la variable z défini par

$$P(z) = z^3 + (14 - i\sqrt{2})z^2 + (74 - 14i\sqrt{2})z - 74i\sqrt{2}.$$

- Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0 .
- Trouver deux nombres réels a et b tels que, pour tout nombre complexe z , on ait

$$P(z) = (z - z_0)(z^2 + az + b).$$

- Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation : $P(z) = 0$.
2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthogonal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On prendra 1 cm pour unité graphique.
- Placer les points A , B et I d'affixes respectives $z_A = -7 + 5i$, $z_B = -7 - 5i$ et $z_I = i\sqrt{2}$.
 - Déterminer l'affixe de l'image du point I par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.
 - Placer le point C d'affixe $z_C = 1 + i$. Déterminer l'affixe du point N tel que $ABCN$ soit un parallélogramme.
 - Placer le point D d'affixe $z_D = 1 + 11i$. Calculer $Z = \frac{z_A - z_C}{z_D - z_B}$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique. Que peut-on dire des droites (AC) et (BD) ? En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

Exercice 2

A/ Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on considère l'intégrale I_n définie par $I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} dx$.

- Calculer I_2 .
- (a) Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier $n \geq 2$,

$$I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1 - n)I_n.$$

- Calculer I_3 et I_4 .

B/ On considère les intégrales I et J ci-dessous

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2x) \cos^2 x dx \text{ et } J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x - 1) \sin^2 x dx$$

- Calculer $I - J$.
- A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I + J$.
- En déduire I et J .

Problème

Partie A

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x + 1 + xe^{-x}$. On note (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Unité 2 cm.

1. (a) Calculer les dérivées première f' et seconde f'' de f .
 (b) Étudier le sens de variation de f' et en déduire le signe de $f'(x)$.
 (c) Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$ puis dresser le tableau de variation de f .
2. (a) Démontrer que la droite $(\Delta) : y = x + 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$ et préciser la position relative de (Δ) et (C) .
 (b) Déterminer les coordonnées du point K en lequel la tangente (T) à (C) est parallèle à la droite (Δ) .
 (c) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Conclure.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une solution unique α tel que $0 < \alpha < 1$.
4. Construire (Δ) , (T) et (C) .
5. (a) A l'aide d'une intégration par partie calculer $\int_0^1 x e^{-x} dx$.
 (b) En déduire l'aire du domaine limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Partie B

On définit sur $[0, 1]$ la fonction h par $h(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$.

1. Démontrer que $h(\alpha) = \alpha$.
2. A l'aide de la variation de h , montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $h(x) \in [0, 1]$.
3. (a) Vérifier que $h''(x) = \frac{e^x(1 - e^x)}{(e^x + 1)^3}$.
 (b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $|h'(x)| \leq \frac{1}{4}$.
4. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = h(u_n)$.
 (a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.
 (b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$.
 (c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{4})^n$.
 (d) Quelle est la limite de (u_n) .
 (e) Déterminer le plus petit entier p tel que $|u_p - \alpha| \leq 10^{-6}$.